# Řešení cvičné zápočtové písemky

Matěj Novotný

9.11.2012

## Zadání

1. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci.

$$f_n(x) = e^{x^3+\frac{1}{n}}, \text{ na } \mathbb{R}$$

*(7 bodů)*

2. Vyšetřete definiční obor, spojitost a diferencovatelnost funkce.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} x^n$$

*(12 bodů)*

3. Sečtěte a odůvodněte!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+2}$$

*(11 bodů)*

## Řešení

1. Platí:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} e^{x^3+\frac{1}{n}} = e^{x^3} =: f(x).$$

Potom je pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |e^{x^3+\frac{1}{n}} - e^{x^3}| = \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{x^3}|e^{\frac{1}{n}} - 1| \stackrel{*}{=} \lim_{x\to\infty} e^{x^3}|e^{\frac{1}{n}} - 1| = \infty,$$

přičemž ve (*) využíváme faktu, že $e^{x^3}$ je rostoucí na $\mathbb{R}$ a $\lim_{x\to-\infty} e^{x^3} = 0$. Není splněno

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

a proto neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$. Na druhou stranu je pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$

$$s_n := \sup_{x\in(-\infty,K)} |e^{x^3+\frac{1}{n}} - e^{x^3}| = \sup_{x\in(-\infty,K)} e^{x^3}|e^{\frac{1}{n}} - 1| = e^{K^3}(e^{\frac{1}{n}} - 1).$$

a tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Proto $f_n \rightrightarrows f$ na intervalu $(-\infty, K)$ pro libovolné $K \in \mathbb{R}$.

2. Definiční obor: Aby řada v bodě $x \in \mathbb{R}$ konvergovala, musí platit $\operatorname{tg} x^n \longrightarrow 0$ pro $n \to \infty$. Pokud je $|x| \geq 1$, podmínka zřejmě splněna není. Pro $x = 0$ řada zřejmě konverguje a pokud $|x| < 1$, $x \neq 0$, srovnáme řadu limitním srovnávacím kritériem s $|x^n|$. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\operatorname{tg} x^n|}{|x^n|} \stackrel{Heine}{=} 1 \in (0, \infty),$$

což plyne ze základní limity pro sinus a z předpokladu pro Heineho větu $x^n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ a $x^n \to 0$ pro $n \to \infty$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ konverguje pro $|x| < 1$, konverguje pro tato $x$ i naše řada a je tedy $D_f = (-1, 1)$.

Vyšetříme stejnoměrnou konvergenci. Vídíme, že na intervalu $[0, 1)$ je tangenta a pro každé $n \in \mathbb{N}$ i funkce $x \mapsto x^n$ rostoucí, proto je rostoucí i jejich složení. Zároveň $\operatorname{tg} 0^n = 0$ a navíc funkce $x \mapsto |\operatorname{tg} x^n|$, $n \in \mathbb{N}$ jsou sudé. Proto je

$$s_n := \sup_{x\in(-1,1)} |\operatorname{tg} x^n| = \sup_{x\in[0,1)} |\operatorname{tg} x^n| = \operatorname{tg} 1.$$

Zřejmě $s_n \to \operatorname{tg} 1$ pro $n \to \infty$, proto řada nekonverguje stejnoměrně na $(-1, 1)$. Přesto, pro libovolné $1 > \delta > 0$ je

$$a_n := \sup_{x\in[-1+\delta,1-\delta]} |\operatorname{tg} x^n| = \operatorname{tg}(1 - \delta)^n.$$

a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (plyne z postupu vyšetřování def. oboru), a použitím Weierstraßovy věty dostáváme, že řada konverguje lokálně stejnoměrně na $D_f = (-1, 1)$. Protože částečné součty jsou spojité na $(-1, 1)$, je i $f$ spojitá na $(-1, 1)$.

Zderivujme $f_n$:

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{\cos^2(x^n)}.$$

Vyšetříme lokálně stejnoměrnou konvergenci řady derivací na $(-1, 1)$. Předně víme, že $x \mapsto \cos^2 x^n$ je sudá pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a také, že je klesající na $[0, \frac{\pi}{2})$, tedy i na $[0, 1)$. Pro $1 > \varepsilon > 0$ máme

$$\sup_{x\in(-1+\varepsilon,1-\varepsilon)} \left|\frac{nx^{n-1}}{\cos^2(x^n)}\right| \le \sup_{x\in(-1+\varepsilon,1-\varepsilon)} \left|\frac{nx^{n-1}}{\cos^2(1)}\right| = \frac{n(1-\varepsilon)^{n-1}}{\cos^2 1} =: \alpha_n.$$

Ověříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}$ pomocí D'Alembertova podílového kritéria ($\alpha_n \ge 0,\ n \in \mathbb{N}$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)(1-\varepsilon)^n}{\cos^2 1}}{\frac{n(1-\varepsilon)^{n+1}}{\cos^2 1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} \cdot (1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon) < 1.$$

Suma $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ tedy konverguje a proto řada derivací konverguje stejnoměrně na $(-1, 1)$. Věta o derivování a spojitosti řady funkcí dává $f \in \mathcal{C}^1((-1, 1))$.

3. Definujeme

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+2} z^{4n+2}.$$

Jelikož koeficienty řady jsou rovny

$$|a_k| = \begin{cases} 0 & \forall n \in \mathbb{N}_0 : k \neq 4n+2 \\ \dfrac{1}{k} & \exists n \in \mathbb{N}_0 : k = 4n+2, \end{cases}$$

je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, proto $R = 1$. Díky tomu je pro každé $z \in (-1, 1)$

$$g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{4n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} (-z^4)^n = z \frac{1}{1+z^4}.$$

Proto platí také pro všechna $z \in (-1, 1)$ a pro vhodné $c \in \mathbb{R}$ rovnost

$$g(z) = \int \frac{z}{1+z^4} \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z^2 + c.$$

Neboť $g(0) = 0$, je $c = 0$. Tedy $g(z) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z^2$ na $(-1,1)$. Jelikož je posloupnost $\{\frac{1}{4n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ monotónní s kladnými členy, konverguje dle Leibnizova kritéria řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+2}.$$

Nyní už jsou splněny předpoklady Abelovy věty, a proto je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+2} = \lim_{z\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+2} z^{4n+2} = \lim_{z\to 1^-} g(z) = \lim_{z\to 1^-} \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z^2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{8}.$$